**1. Ograničeni nizovi. Monotoni nizovi.**

Niz je ograničen ako postoje stvarni brojevi M i m tako da su sve vrednosti niza između M i m. Drugim rečima, nema elemenata niza koji su veći od M ili manji od m.

Monotoni nizovisu posebna klasa nizova koja pokazuje dosledan oblik rasta ili opadanja. Dele se na:

1. *Rastući Niz (Neopadajući):* Niz se naziva rastućim ako za svako n ∈ N važi: ≤
2. *Strogo Rastući Niz:* Niz se naziva strogo rastućim ako za svako n ∈ N važi ​< ​
3. *Opadajući Niz (Nerastući):* Niz se naziva opadajućim ako za svako n ∈ N važi ≥
4. *Strogo Opadajući Niz:* Niz se naziva strogo opadajućim ako za svako n ∈ N važi an >

**2. Tačke nagomilavanja niza.**

Neka je niz realnih brojeva, i neka je L realan broj. Kažemo da je L tačka nagomilavanja niza ako za svako pozitivno ϵ postoji beskonačno mnogo članova niza ​ koji leže unutar intervala (L−ϵ, L+ϵ), tj. na udaljenosti manjoj od ϵ do L.

Ovo znači da uvek ćemo moći da nađemo beskonačno mnogo članova niza koji se nalaze unutar tog intervala oko L. Bez obzira koliko se "približimo" toj tački L, uvek ćemo pronaći još članova niza. Ovo važi za svaki ϵ.

Tačka nagomilavanja ne mora biti član niza. Niz može imati više od jedne tačke nagomilavanja, ili čak nijednu.

**3. Definicija konvergencije brojnog niza. Aritmetičke osobine konvergentnih nizova.**

Niz realnih brojeva konvergira ka broju L ako za svako ϵ > 0 postoji prirodan broj N takav da za svako n ≥ N važi ∣− L∣ < ϵ

Na srpskom: Postoji neki broj L i mi želimo da vidimo da li se članovi niza približavaju tom broju. Broj ϵ označava “toleranciju za grešku”, tj. za koliko član sme da se razlikuje od broja L da bi smo smatrali da je “blizu” broja L.

Zamislimo neki prirodan broj N. Ako niz konvergira, onda su svi članovi niza sa indeksom većim ili jednakim od N “blizu” broja L. Razlika između i L mora biti manja od ϵ. Ovo mora da važi bez obzira na to da li je ​ veći ili manji od L, stoga koristimo apsolutnu vrednost razlike ​ i L.

Ako su i ​ konvergentni nizovi sa limitama L i M respektivno, onda važe sledeće aritmetičke osobine osobine:

1. *Zbir Konvergentnih Nizova:* Niz + je konvergentan i ima limitu L+M.
2. *Razlika Konvergentnih Nizova:* Niz − je konvergentan i ima limitu L−M.
3. *Proizvod Konvergentnih Nizova:* Niz ⋅ je konvergentan i ima limitu L⋅M.
4. *Kvocijent Konvergentnih Nizova:* Ako je M≠0, niz / je konvergentan i ima limitu L/M​.
5. *Skalarni Proizvod:* Ako je c neki realan broj, niz c ⋅ je konvergentan i ima limitu c⋅L.

**4. Stavovi o konvergeniciji monotonih i ograničenih nizova. Stav o tri niza. Stav o vezi između konvergentnosti i ograničenosti nizova.**

Stav o konvergenciji monotonih i ograničenih nizova: Ako je niz realnih brojeva monoton i ograničen, onda je konvergentan. Drugim rečima:

* Neopadajući niz koji je gornje ograničen je konvergentan.
* Nerastući niz koji je donje ograničen je konvergentan.

Stav o tri niza: Ako postoje tri niza, i tako da važi ≤ ≤ za sve indekse n, i ako i konvergiraju ka L, onda i konvergira ka L.

Drugim rečima, ako je niz “između” dva niza, tj. ako svaka vrednost prvog niza je veća od odgovarajuće vrednosti drugog niza i manja od odgovarajuće vrednosti trećeg niza, i ako drugi i treći niz konvergiraju ka L, onda i prvi niz konvergira ka L.

Stav o vezi između konvergentnosti i ograničenosti nizova:Ako niz konvergira ka broju L, tada se sve njegove vrednosti nalaze u blizini L. Konvergentan niz je uvek ograničen. Međutim, ako je niz ograničen, to ne znači automatski da je konvergentan. Ograničen niz može imati vrednosti koje se ne približavaju određenom broju, kao što je slučaj sa nizom čije vrednosti alterniraju po znaku.

**5. Pojam granične vrednosti funkcije (definicija granične vrednosti i definicija granične vrednosti u beskonačnosti).**

Granična vrednost funkcije f(x): Neka je f(x) realna funkcija definisana na nekom otvorenom intervalu koji sadrži tačku a. Kažemo da je granična vrednost funkcije f(x) jednaka L dok x teži ka a, i pišemo

lim⁡x→a f(x) = L

ako za svaki broj ε>0 postoji broj δ>0 tako da za svako x koje zadovoljava 0<∣x−a∣<δ, važi ∣f(x)−L∣<ε.

Drugim rečima, zamislimo da imamo funkciju f(x) i želimo da ispitamo šta se dešava s vrednošću funkcije dok x prilazi nekoj tački a. Granična vrednost funkcije u tački a je broj L koji predstavlja vrednost kojoj funkcija teži dok x prilazi a.

Broj ε predstavlja koliko sme vrednost funkcije f(x) da se razlikuje od L. Sada želimo da pronađemo neki δ>0 koji će nam dati "prsten" oko a na x-osi koji je širok za količinu δ. Cilj je da svaki x unutar ovog prstena ima vrednost f(x) koja je unutar ε-prstena oko L.

Granična vrednost funkcije f(x) u beskonačnosti: Granična vrednost funkcije u beskonačnosti odnosi se na ponašanje funkcije dok x teži ka beskonačnosti (ili ka minus beskonačnosti). Definicije su sledeće:

Kažemo da je granična vrednost funkcije f(x) jednaka L dok x teži ka plus beskonačnosti, i pišemo

lim⁡x→∞ f(x) = L

ako za svaki broj ε>0 postoji broj M>0 tako da za svako x>M, važi ∣f(x)−L∣<ε.

Drugim rečima, ε predstavlja koliko f(x) sme da bude “udaljen” od broja L. Broj M je broj koji, ako uzmeš bilo koju vrednost x koja je veća od M, funkcija f(x) će biti unutar tog "razmaka" oko L, što se piše kao ∣f(x)−L∣<ε. Ovo nam govori da funkcija teži ka L dok x postaje sve veći.

**6. Leva i desna granična vrednosti funkcije. Navesti teoremu koja se odnosi na vezu leve i desne granične vrednosti funkcije sa graničnom vrednosti funkcije u tački.**

Leva granična vrednost funkcije f(x): Leva granična vrednost funkcije f(x) u tački a je vrednost kojoj funkcija teži kada se x približava tački a sa leve strane tj. iz vrednosti manjih od a koje rastu dok ne stignu do a. Piše se kao:

lim⁡x→a− f(x).

Desna granična vrednost funkcije f(x): Desna granična vrednost funkcije f(x) u tački a je vrednost kojoj funkcija teži kada se x približava tački a sa desne strane tj. iz vrednosti većih od a koje se smanjuju dok ne stignu do a. Piše se kao

lim⁡x→a+ f(x).

Teorema o vezi leve i desne granične vrednosti sa graničnom vrednosti funkcije f(x) u tački: Granična vrednost funkcije f(x) u tački a postoji i jednaka je L ako i samo ako obe, leva i desna granična vrednost u tački a, postoje i jednake su L. Odnosno:

lim⁡x→a f(x) = L  ⟺  lim⁡x→a− f(x) = lim⁡x→a+ f(x) = L

Ova teorema nam osnovno govori da, ako funkcija ima graničnu vrednost u tački a, ona mora "dolaziti" do te vrednosti isto i s leve i s desne strane te tačke.

**7. Osobine granične vrednosti funkcije.**

Osobine granične vrednosti funkcije uključuju pravila kako se granične vrednosti ponašaju pri osnovnim matematičkim operacijama i kako se ponašaju pri približavanju određenim vrednostima:

1. *Zbir i razlika:* Granična vrednost zbira (ili razlike) dve funkcije je zbir (ili razlika) njihovih graničnih vrednosti:

limx→a ​[f(x) ± g(x)] = limx→a ​f(x) ± lim​x→a g(x)

1. *Množenje:* Granična vrednost proizvoda dve funkcije je proizvod njihovih graničnih vrednosti.

limx→a ​[f(x) ⋅ g(x)] = limx→a ​f(x) ⋅ lim​x→a g(x)

1. *Deljenje:* Granična vrednost količnika dve funkcije je količnik njihovih graničnih vrednosti, pod uslovom da granična vrednost funkcije u imeniocu nije nula.

limx→a ​[f(x) / g(x)] = limx→a ​f(x) / lim​x→a g(x)

1. *Konstanta pomnožena sa funkcijom:* Granična vrednost konstante puta funkciju je jednaka konstanti puta granična vrednost te funkcije.

limx→a ​[c ⋅ f(x)] = c ⋅ lim​x→a f(x)

1. *Granična vrednost konstante:* Vrednost konstante c je ista bez obzira na vrednost x, što znači da je granična vrednost jednostavno ista ta konstanta.

limx→a ​c = c

1. *Stav o graničnoj vrednosti kompozicije funkcija:* Ako stavimo ulaz x u funkciju f koja daje izlaz A, zatim unesemo taj izlaz kao ulaz y u funkciju g, ona daje konačni izlaz B. Dakle, kada x ide prema a, konačni izlaz kompozicije ide prema B. Drugim rečima, ako:

lim⁡x→a f(x) = A i lim⁡y→A g(y) = B

tada važi:

lim⁡x→a g(f(x)) = B

1. *Lema o dva policajca:* Ako imamo tri funkcije f, g i h, gde je vrednost h(x) uvek između f(x) i g(x) za odgovarajuć x i ako znamo da f i g idu prema istoj vrednosti A kada x ide prema tački a, možemo zaključiti da h takođe mora ići prema A.

**8. Definicija neprekidnosti funkcije u tački. Tačke prekida funkcije prve vrste. Tačke prekida funkcije druge vrste.**

Neprekidnost funkcije u tački: Funkcija f je neprekidna u tački c ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. f(c) je definisana.
2. Granica funkcije f u tački cc postoji i jednaka je f(c). Drugim rečima, lim⁡x→c f(x)=f(c)
3. lim⁡x→c+ f(x) = lim⁡x→c− f(x) = f(c), gde lim⁡x→c+​ označava desnu granicu, a lim⁡x→c−​ označava levu granicu.

Tačke prekida funkcije prve vrste: Ovde, funkcija menja vrednost naglo (ili pravi “skok”), ali možemo odrediti kako se ponaša sa jedne ili obe strane te tačke. Postoje dve vrste:

1. Skočni prekid - postoji kada obe jednostrane granice u tački c postoje, ali nisu jednake, ili nijedna od njih nije jednaka f(c).
2. Izolovani prekid - postoji kada f(c) nije definisana, ali obe jednostrane granice u tački c postoje i jednake su.

Tačke prekida funkcije druge vrste: Ovde, ne samo da funkcija menja svoju vrednost naglo, već ne možemo ni odrediti kako se ponaša sa jedne ili obe strane te tačke.

1. Osobine prekida - postoji kada barem jedna od jednostranih granica u tački c ne postoji.

**9. Stavovi o neprekidnosti funkcije u tački (neprekidnost zbira, razlike, proizvoda i količnika dve neprekidne funkcije).**

Stav o neprekidnosti zbira: Ako su funkcije f i g neprekidne u tački x0, tada je njihov zbir, funkcija (f + g), takođe neprekidna u tački x0.

Stav o neprekidnosti razlike: Ako su funkcije f i g neprekidne u tački x0, tada je njihova razlika, funkcija (f - g), takođe neprekidna u tački x0.

Stav o neprekidnosti proizvoda: Ako su funkcije f i g neprekidne u tački x0, tada je njihov proizvod, funkcija (f \* g), takođe neprekidna u tački x0.

Stav o neprekidnosti količnika: Ako su funkcije f i g neprekidne u tački x0 i g(x0) nije jednako nuli, tada je njihov količnik, funkcija (f / g), takođe neprekidna u tački x0.

**10. Neprekidnost funkcije na intervalu. Neprekidnosti funkcije na segmentu (Bolcano-Košijeve teoreme i Vajerštrasove teoreme).**

Neprekidnost funkcije na intervalu: Kažemo da je funkcija neprekidna na intervalu ako je neprekidna u svakoj tački na tom intervalu. Formalno, funkcija f(x) je neprekidna na intervalu (a,b) ako je neprekidna u svakoj tački tog intervala. Formalno, funkcija f je neprekidna u tački c iz intervala (a,b) ako za svaku pozitivnu vrednost ε postoji pozitivna vrednost δ tako da, ako x pripada intervalu (a,b) i ako je ∣x−c∣<δ, onda je ∣f(x)−f(c)∣<ε.

Neprekidnost funkcije na segmentu: Funkcija je neprekidna na zatvorenom segmentu [a,b] ako je:

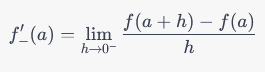
1. Neprekidna na otvorenom intervalu (a,b)
2. Desno neprekidna u tački a
3. Levo neprekidna u tački b

Bolcano-Košijeve teoreme: Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom segmentu [a,b] i menja znak na krajevima tog intervala (tj. f(a) i f(b) su različitih znakova), onda postoji barem jedna tačka cc u otvorenom intervalu (a,b) gde je f(c)=0.

Vajerštrasove teoreme: Svaka neprekidna funkcija na zatvorenom i ograničenom segmentu [a,b] dostiže svoju najmanju i najveću vrednost na tom intervalu.

**11. Definicija izvoda u tački. Levi i desni izvod funkcije u tački. Stav o veza između neprekidnosti i diferencijabilnosti funkcije u tački.**

Neka je f funkcija definisana u nekoj okolini tačke a. Izvod funkcije f u tački a je granica razlomka:

Levi izvod funkcije f u tački a je:

a desni izvod funkcije f u tački a je:

Funkcija f ima izvod u tački a ukoliko su njen levi i desni izvod u toj tački jednaki i konačni.

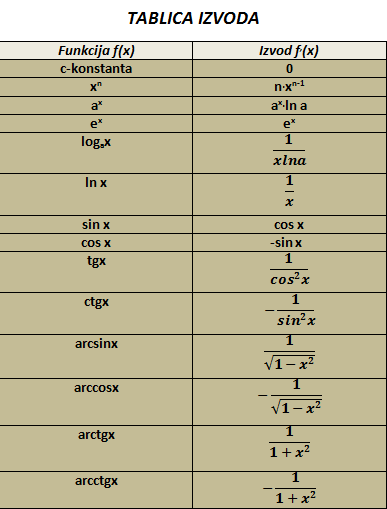
Stav o vezi između neprekidnosti i diferencijabilnosti funkcije u tački:

1. Ako je funkcija diferencirana u tački a (tj. funkcija ima definisan izvod u toj tački), onda je i neprekidna u tački a.
2. Funkcija može biti neprekidna u nekoj tački ali da ne bude diferencirana u toj tački.

**12. Geometrijska interpretacija izvoda.**

Zamislite da crtate liniju koja dodiruje krivu samo u jednoj tački, tački (a,f(a)). Ta linija se zove tangenta. Nagib te tangente je upravo vrednost izvoda funkcije u toj tački. Drugim rečima, izvod funkcije f u tački x=a nam daje informaciju o brzini i pravcu promene funkcije.

Ako je izvod pozitivan u tački x=a, to znači da funkcija raste u toj tački i nagib tangente je pozitivan. Ako je izvod negativan, funkcija opada i nagib tangente je negativan. Ako je izvod nula, funkcija ni ne raste ni ne opada, što znači da je tangenta horizontalna.

**13. Osnovna pravila za izvode. Izvod složene funkcije.**

Izvod složene funkcije (Lančano pravilo): U osnovi, izvod složene funkcije je proizvod izvoda spoljne funkcije i izvoda unutrašnje funkcije.

Ako je y = f(u) i u = g(x), onda je:

= f′(u) ⋅ g′(x)

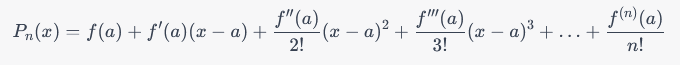
**14. Logaritamski izvod. Izvod funkcije zadate implicitno i parametarski. Stav o izvodu inverzne funkcije.**

**15. Fermaova teorema. Rolova teorema.**

**16. Košijeva teorema. Lagranžova teorema.**

**17. Tejlorova formula. Tejlorov polinom.**

Tejlorova formula predstavlja opšti oblik za aproksimaciju funkcije pomoću njenih derivata u određenoj tački.

Tejlorov polinom za funkciju f(x) oko tačke a reda n je dat sa:

Tejlorova formula tvrdi da ako f ima sve potrebne izvode, tada se funkcija može aproksimirati u nekoj tački b koristeći Tejlorov polinom plus ostatak Rn​:

Ostatak Rn​ je deo koji nije obuhvaćen Tejlorovim polinomom i predstavlja grešku u aproksimaciji.

**18. Lopitalovo pravilo. Lopitalovo pravilo i neodređenosti oblika 0·∞, ∞ - ∞, 1^∞, 0^0, ∞^0.**

Lopitalovo pravilo je metoda za računanje granica koje rezultuju neodređenim oblikom 0/0​ ili ∞/∞​. Da bismo koristili Lopitalovo pravilo, funkcije u brojniku i imeniocu moraju biti derivabilne na intervalu koji sadrži tačku gde računamo granicu.

**Lopitalovo pravilo glasi** da ako je:

lim⁡x→c f(x) = lim⁡x→c g(x) = 0 ILI lim⁡x→c f(x) = lim⁡x→c g(x) = ∞

i ako postoji granica:

lim⁡x→c f′(x) / g′(x)

onda je:

lim⁡x→c f(x) / g(x) = lim⁡x→c f′(x) / g′(x)

gde su f′(x) i g′(x) prve derivacije funkcija f i g respektivno.

**19. Neohodni i potrebni uslovi za monotonost funkcije. Lokalne ekstremne vrednosti. Tačke u kojima funkcija nema izvod.**

Monotonost funkcije

**Neophodni uslov**:

* + Ako f je diferencijabilna na (a,b) i f′(x)>0 za svako x iz (a,b), tada f strogo raste na [a,b].
  + Ako f′(x)<0 za svako x iz (a,b), tada f strogo opada na [a,b].

**Potrebni uslov**:

* + Ako f strogo raste/opada na (a,b), njen izvod f′(x) je pozitivan/negativan, uz pretpostavku postojanja izvoda.

Lokalne ekstremne vrednosti

Pretpostavimo da unkcija f ima izvod u c i f′(c)=0 ili izvod ne postoji.

* + Ako je f(c) veće od okolnih vrednosti, f(c) je lokalni maksimum.
  + Ako je f(c) manje od okolnih vrednosti, f(c) je lokalni minimum.

Tačke u kojima funkcija nema izvod:

Funkcija može da nema izvod u tački iz više razloga:

1. Tačka je mestimična nesavršenost (npr. prelom ili ugao funkcije)
2. Funkcija ima vertikalnu tangentu u toj tački.
3. Funkcija osciluje u toj tački
4. Funkcija nije definisana u toj tački

**20. Konkavnost i konveksnost funkcije. Tačke prevoja.**

Za funkciju y = f(x) kažemo da je funkcija konveksna (tj. konkavna) u tački x0​ iz intervala (a,b) ako postoji okolina te tačke u kojoj je grafik funkcije iznad (tj. ispod) tangente povučene na grafik u tački (x0, f(x0)).

Tačka prevoja funkcije je tačka na grafikonu funkcije u kojoj se menja konkavnost. To znači da grafikon prelazi iz konkavnog oblika (prema gore) u konveksni oblik (prema dolje) ili obrnuto.

**21. Asimptote funkcije.**

Asimptote funkcije su pravci ili krive koje funkcija prilazi dok xx teži ka beskonačnosti (ili nekoj drugoj tački). Postoje tri osnovne vrste asimptota: horizontalne, vertikalne i kosine.

1. *Horizontalna asimptota:* Ako y=c je horizontalna asimptota funkcije f(x), to znači da vrednost funkcije f(x) teži ka c dok x teži ka beskonačnosti ili ka minus beskonačnosti.
2. *Vertikalna asimptota:* Ako x=a je vertikalna asimptota funkcije f(x), to znači da vrednost funkcije f(x) teži ka beskonačnosti (ili minus beskonačnosti) dok x prilazi vrednosti aa s leva ili desna.
3. *Kosina asimptota:* Ako pravac y=mx+b je kosina asimptota funkcije f(x), to znači da grafik funkcije prilazi ovom pravcu dok x teži ka beskonačnosti ili ka minus beskonačnosti.

**22. Uvođenje smene u neodređeni integral – dati iskaz stava, kao i formulu kojom se vrši uvođenje smene.**

Kada vršimo integraciju funkcije i želimo olakšati postupak ili dovesti funkciju u poznatiji oblik, možemo uvesti smenu promenljive. Ovo se često koristi kada je funkcija sastavljena ili kada postoji funkcija unutar druge funkcije.

Formula za uvođenje smene: Ako imamo:

∫ f(g(x)) ⋅ g′(x) dx

i uvedemo smenu u = g(x) (što znači du = g′(x) dx iz čega sledi dx = du / g’(x)), integral se može reprezentovati kao:

∫ f(u) du

Nakon što izračunamo integral u odnosu na u, zamijenimouu sa originalnom funkcijom g(x) kako bismo dobili konačan odgovor u odnosu na x.

**23. Metod parcijalne integracije – izvesti formulu za parcijalnu integraciju i opisati za koje klase podintegralnih funkcija se koristi ova metoda.**

Zasnovano je na osnovnoj formuli diferencijalnog računa važi:

(uv)′ = u′v + uv′

Ako integrišemo obe strane po dxdx, dobijamo:

∫ (uv)′ dx = ∫ u′v dx + ∫ uv′ dx

Leva strana je jednostavno uv jer integracija izvoda daje originalni broj (konstantu c zanemarujemo jer se javlja sa obe strane). Dakle:

uv = ∫ u′v dx+∫ uv′ dx

Premeštanje jednog od integrala na drugu stranu daje:

∫ uv′ dx = uv − ∫ u′v dx

Ovo je formula parcijalne integracije. Koristimo je tako što odaberemo funkcije uu i v′v′ iz podintegralne funkcije, a zatim izračunamo derivate i integrale prema potrebi kako bismo primenili formulu.

**24. Metod neodređenih koeficijenata za integraciju racionalnih funkcija – opisati postupak kako se ovom metodom vrši rastavljanje racionalne funkcije na elementarne racionalne funkcije.**

Racionalna funkcija je kvocijent dva polinoma, oblika: P(x) / Q(x)

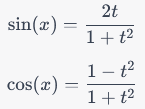
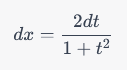
Metod neodređenih koeficijenata se koristi ako je stepen P(x) manji od stepena Q(x). Ako je stepen P(x) veći ili jednak stepenu Q(x), izvršiti polinomijalno deljenje da bi smo dobili razlomak kao ostatak.

Cilj je predstaviti Q(x) kao proizvod linearnih članova oblika ax+b i/ili kvadratnih članova oblika ax2+bx+c. Potom postavimo da je originalna racionalna funkcija jednaka sumi predpostavljenih parcijalnih razlomaka. Kada integrišemo svaki od parcijalnih razlomaka zasebno. Suma tih integrala će biti integral originalne racionalne funkcije.

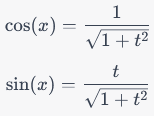
**25. Integracija racionalnih funkcija po sin 𝑥 i 𝑐𝑜𝑠𝑥 – smene: 𝑡𝑔 𝑥/2 = 𝑡 i 𝑡𝑔𝑥 = 𝑡.**

Kada se susretnete s integralom koji sadrži racionalnu funkciju u odnosu na sin⁡(x) i cos⁡(x), možete pokušati da koristite jednu od ovih smena. Nakon što primenite smenu, integral se može prevesti u racionalnu funkciju u odnosu na tt, koja se može rešiti klasičnim metodama integracije racionalnih funkcija.

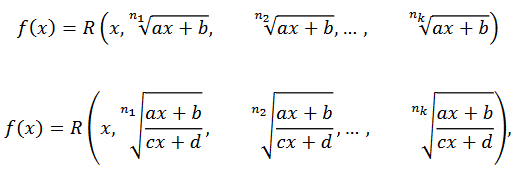
Smena tg x/2 = t:

Koristeći trigonometrijske identitete, možemo izraziti sin⁡(x) i cos⁡(x) i derivaciju za tg x/2 pomoću t:

Smena tgx = t:

U ovom slučaju bi važilo:



**26. Integracija iracionalnih funkcija oblika**

**gde je R racionalna funkcija svojih argumenata.**

**27. Integracija iracionalnih funkcija oblika 𝑓(𝑥) = 𝑅(𝑥, √𝑎𝑥2 + 𝑏𝑥 + 𝑐), gde je R racionalna funkcija svojih argumenata (Prva, druga i treća Ojlerova smena).**

U redu, pravite se na specifičan slučaj Ojlerove smene. Kada a>0 u kvadratnom trinomu ax2+bx+c, prva Ojlerova smena glasi:

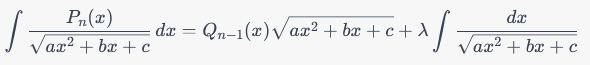
Druga Ojlerova smena se koristi kada je a<0 ali je c>0 u kvadratnom trinomu ax2+bx+c.

Kada kvadratni polinom ax2+bx+c ima realne i različite korene x1 i x2​, možemo ga zapisati kao ax2+bx+c = a(x−x1)(x−x2). U tom slučaju, kada želimo da integrišemo funkciju koja sadrži koren ovog trinoma, koristimo jednu od sledećih Ojlerovih smena:

Ovo je treća Ojlerova smena.

**28. Metod Ostrogradskog za integraciju iracionalnih funkcija.**

Metod Ostrogradskog je tehnika za integraciju iracionalnih funkcija koje imaju kvadratni trinom u imeniocu pod korenom:

gde je Pn(x) polinom n-tog stepena. Ovaj integral se može izraziti kao:

gde je Qn−1(x) polinom stepena n−1 i λ je neka konstanta.

**29. Binomni diferencijal.**

Integrali oblika:

mogu se rešiti u sledećim slučajevima:

1. *Ako je p ceo broj:* U ovom slučaju, integrand je već racionalna funkcija i može se direktno integrisati.
2. *Ako je p racionalan broj i (m+1)/n je ceo broj:* Uvodi se smena ts=a+bxn, gde je s imenilac razlomka p. Nakon ove substitucije, integrand postaje racionalna funkcija u t i može se integrisati standardnim metodama za racionalne funkcije.
3. *Ako je p racionalan broj i ((m+1)/n)+p je ceo broj:* Uvodi se smena ts=ax−n+b, gde je s imenilac razlomka pp. Nakon ove substitucije, integrand postaje racionalna funkcija u t i može se integrisati.

**30. Gornja i donja Darbuova suma i njihove osobine. Integralna suma. Definicija određenog integrala.**

Za funkciju f definisanu na intervalu [a,b], ako želimo da aproksimiramo površinu ispod krive, koristimo particije ovog intervala koji se grafički prikazuju kao pravougaonici.

Za odabranu particiju P={x0​,x1​,…,xn​} intervala [a,b], za svaki podinterval [xi−1,xi] tražimo maksimalnu vrednost funkcije Mi i minimalnu vrednost funkcije mi.

Gornja Darbuova suma je suma površine svih pravougaonika visine Mi dok je donja Darbuova suma suma površine svih pravougaonika visine mi.

Integralna suma funkcije f na nekom intervalu [a,b] ga takođe deli na podinvertale. Potom bira *bilo koju tačku* unutar svakog podintervala. Vrednost funkcije u toj tački množimo sa širinom podintervala da bismo dobili površinu pravougaonika. Potom nalazimo sumu svih pravougaonika.

Kažemo da je funkcija f integrabilna na intervalu [a,b] i da je jednaka broju I ako, dok pravimo particije sve finijim (tj. smanjujemo dužinu podintervala), gornja i donja Darbuova suma konvergiraju ka istoj vrednosti I. Ova grančna vrednost je određeni integral.

**31. Osnovne osobine određenog integrala.**

U

**32. Veza između određene i neodređene integracije – Njutn-Lajbnicova formula.**

Njutn-Lajbnicova formula nam govori da kako bismo pronašli površinu ispod krive funkcije f na intervalu [a,b] možemo jednostavno uzeti funkciju F odnosno antiderivativ i izračunati razliku vrednosti te funkcije na krajevima intervala.

Ako je funkcija ff kontinuirana na zatvorenom intervalu [a,b] i F je antiderivativ od f na [a,b], tada važi:

∫abf(x) dx=F(b)−F(a)

Drugim rečima, određeni integral funkcije f na intervalu [a,b] je jednak razlici vrednosti antiderivativne funkcije F na krajevima intervala.

**33. Geometrijska interpretacija određenog integrala.**

Neka je data funkcija y=f(x) na intervalu [a,b] gde je f(x)>0 za svaku tačku na tom intervalu. Ako vizuelizujemo ovu funkciju na koordinatnom sistemu, ona formira krivu iznad x-ose.

Oblik koji je ograničen grafikom funkcije, x-osom, i vertikalnim linijama u tačkama x=a i x=b naziva se krivolinijski trapez.

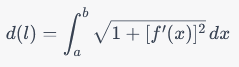
Ako je f(x)≥0 na intervalu, ali dostiže vrednost 0 u nekim tačkama, krivolinijski trapez može da pređe u degenerativni oblik. To znači da umesto da je potpuno iznad x-ose, deo krivolinijskog trapeza može da se "slepi" sa x-osom.

Ako je f(x)<0, onda je trapez “obrnut” tj. nalazi se ispod x-ose tako da je linija f(x) na intervalu [a,b] donja granica a x-osa je gornja.

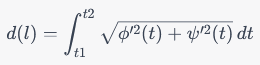
**34. Određivanje dužine luka krive primenom određenog integrala.**

#### *Za funkciju zadata u obliku y=f(x):*

Ako imamo funkciju y=f(x)i želimo da saznamo koliko je dugačka između dve tačke x=a i x=b, koristimo određeni integral. Formula izgleda ovako:

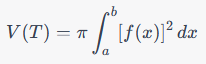
Ovde, f′(x) je samo brzina promene funkcije f, ili koliko se f menja kada se x malo promeni.

#### *Za krivu zadanu parametarski:*

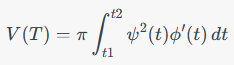
Ako je kriva opisana pomoću dve funkcije x=ϕ(t)i y=ψ(t) , formula izgleda malo drugačije:

Ovde, ϕ′(t) i ψ′(t) su brzine promene funkcija ϕ i ψ, tj. koliko se one menjaju kada se tt malo promeni.

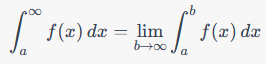
**35. Određivanje zapremine i površine rotacionog tela primenom određenog integrala.**

Kada krivu rotiramo oko ose, formiramo rotaciono telo. Ako je ta kriva opisana funkcijom y=f(x), zapremina rotacionog tela, V(T), dobijena rotacijom krive oko x-ose je:

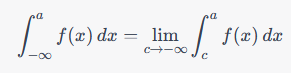
Ovo se može zamisliti kao niz vertikalnih "diskova" čija je zapremina zbir svih tih malih delova.

Ako je kriva opisana parametarski preko x=ϕ(t) i y=ψ(t), formula za zapreminu je:

**36. Nesvojstveni integral prve vrste – Integral sa beskonačnom gornjom granicom, Integral sa beskonačnom donjom granicom.**

*Integral sa beskonačnom gornjom granicom:* Ako želimo da izračunamo integral funkcije f(x) sa intervala [a,∞), koristimo sledeći pristup:

Ovde, b je proizvoljna konačna gornja granica, a zatim uzimamo granicu dok b teži ka beskonačnosti.

*Integral sa beskonačnom donjom granicom:* Ako želimo da izračunamo integral funkcije f(x) sa intervala (−∞,a], koristimo sledeći pristup:

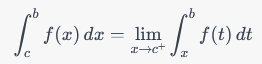
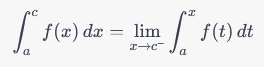
Ovde, c je proizvoljna konačna donja granica, a zatim uzimamo granicu dok cc teži ka negativnoj beskonačnosti.

Ako je jedan od ovih limita konačan, kažemo da je nesvojstveni integral konvergentan. Ako je limita beskonačna ili ne postoji, kažemo da je nesvojstveni integral divergentan.

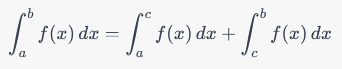
**37. Nesvojstveni integral druge vrste – Integral neograničene funkcije na posmatranom ograničenom intervalu.**

Nesvojstveni integrali druge vrste odnose se na integrale funkcija koje postaju beskonačne (neograničene) unutar intervala integracije.

Razmotrimo funkciju f(x) koja postaje beskonačna u tački cc unutar intervala [a,b]. Integral funkcije f(x) preko intervala [a,b] može se definisati kao zbir dva nesvojstvena integrala.

Ako imamo:

Ukupni integral funkcije f(x)f(x) preko intervala [a,b][a,b] je zbir ova dva integrala:



**38. Pojam funkcije dve promenljive.**

Realna funkcija dve realne promenljive je pravilo ili zakon kojim se svakom uređenom paru (x,y) iz skupa A (koji je podskup R2) pridružuje tačno jedan broj zz iz skupa B (koji je podskup R).

Napomena: U daljem tekstu, realnu funkciju dve realne promenljive ćemo kraće nazivati "funkcija dve promenljive".

Skup A se naziva domen funkcije ili oblast definisanosti funkcije. Skup B se naziva skup vrednosti ili kodomen funkcije. Vrednosti x i y su nezavisne promenljive ili argumenti funkcije. Vrednost zz je zavisna promenljiva.

Zapisivanje Funkcije: Funkcija dve promenljive se obično zapisuje kao z=f(x,y). Može biti predstavljena u eksplicitnom, parametarskom ili implicitnom obliku.

Oblast Definisanosti: Oblast definisanosti funkcije dve promenljive je skup svih tačaka (x,y) za koje se može odrediti vrednost z=f(x,y). Slične napomene o oblasti definisanosti važe kao i kod funkcija jedne promenljive.

Grafik: Grafik funkcije dve promenljive predstavlja trodimenzionalni skup tačaka u R3 koji je definisan kao:

Γf = {(x,y, f(x,y)) ∣ (x,y) ∈ D} ⊂ R3

Gde je D domen funkcije.

**39. Granična vrednost funkcije dve promenljive.**

**40. Neprekidnost funkcije dve promenljive.**

U

**41. Prvi parcijalni izvodi funkcije dve promenljive. Parcijalni izvodi višeg reda. Stav o jednakosti mešovitih parcijalnih izvoda drugog reda.**

U

**42. Lokalni ekstremi funkcije dve promenljive – stacionarne tačke. Silvesterovo pravilo.**

U

**43. Totalni diferencijal prvog i višeg reda funkcije dve promenljive.**

U

**44. Uslovni ekstremi funkcije dve promenljive – Langražev metod multiplikatora, metod eliminacije.**

U

**45. Diferencijalna jednačina prvog reda koja razdvaja promenljive.**

U

**46. Homogena diferencijalna jednačina prvog reda po x i y.**

U

**47. Linearna diferencijalna jednačina prvog reda – homogena i nehomogena. Opšte rešenje.**

U

**48. Bernulijeva diferencijalna jednačina prvog reda – postupak za njeno rešavanje.**

U

**49. Diferencijalna jednačina prvog reda koja predstavlja totalni diferencijal – postupak za njeno rešavanje.**

U

**50. Konvergencija redova sa pozitivnim članovima – prvi i drugi poredbeni kriterijum.**

U

**51. Konvergencija redova sa pozitivnim članovima – Košijev koreni kriterijum.**

U

**52. Konvergencija redova sa pozitivnim članovima – Dalamberov kriterijum.**

U

**53. Konvergencija redova sa pozitivnim članovima – Košijev integralni kriterijum.**

U

**54. Brojni redovi sa članovima promenljivog znaka – Apsolutna i uslovna konvergencija, Lajbnicov kriterijum, Divergencija.**

U

**55. Funkcionalni niz – definicija, konvergetnost u tački, na intervalu i uniformna konvergencija.**

U

**56. Funkcionalni red – definicija, konvergentnost u tački i na intervalu.**

U

**57. Funkcionalni red – pojam uniformne konvergencije i osobine uniformno konvegentnih redova. Vajerštrasov kriterijum.**

U

**58. Stepeni red – pojam. Abelov kriterijum za konvergenciju.**

U

**59. Stepeni red – metodologije za određivanje poluprečnika konvergencije. Uniformna konvergencija stepenih redova.**

U

**60. Maklorenov i Tejlorov red – Klasa beskonačno diferencijabilnih funkcija i klasa analitičkih funkcija. Karakterizacija analitičnosti beskonačno diferencijabilnih funkcija.**

U